86. Function group ニ就テ

清水辰次郎，吉田耕作，角谷静夫（阪大）

1）$f(z)$ ヲ全有限平面デノ meromorphic function

トスル。

若シ

$$f(\varphi(z)) = f(z) \tag{1}$$

ヲ満足スルスベテノ $\varphi(z)$ ニ對シテ

$$f'(\varphi(z)) = f'(z) \tag{2}$$

が成立スレバ

$$f(z) = \frac{\alpha e^{cz} + \beta}{\gamma e^{cz} + \delta}\text{；}\alpha, \beta, c, \delta \text{ ハ常數} \tag{3}$$

トナル。

証明．$\varphi(z)$ ノ regular point ノ近傍デハ（1）ヨリ

$$f'(\varphi(z))\varphi'(z) = f'(z)$$

デアルカラ（2）ヨリ

$$\varphi'(z) \equiv 1, \qquad \varphi(z) \equiv z + \mathrm{const.}$$

ヲ得ル。

コレヨリ $f(z)$ が periodic function ナルコトヲ

知ル。

(i) *double-periodic* ナルトキ。

$f(z)$ ハ *period* ノ平行四辺形ノ内デ *schlicht* デナケレバナラヌ。モシサウデナケレバ

$$f(z_1)=f(z_2), \quad z_1 \neq z_2$$

ヲ満足スル z_1, z_2 ガ一ツノ *period* ノ四辺形内ニ存在スル。 $z_2=\varphi(z_1)$ ナル如キ $\varphi(z)$ ヲトレバコレハ $\varphi(z)=z+\mathrm{const.}$ ト云フ形ニナレナイ。

トコロガ *period* ノ平行四辺形内デ *schlicht* ナ *double-periodic function* ハ存在シナイ。*

---

* T. Shimizu: On the Linear Functions of Automorphism for meromorphic functions, 東北數學雜誌, vol 38, p. 223.

(ii) *simple-periodic* ナルトキ。

最小ノ *period* ヲ $\frac{2\pi i}{c}$ トスレバ、コノ時モ前ト同様ニ *period* ノ帯状形ノ中デ $f(z)$ ハ *schlicht* デナケレバナラヌ。スルト

$$f(z)\equiv g(x), \quad x=e^{cz}$$

デ定義サレタ $g(x)$ ハ全平面デ *schlicht* ニナルカラ

$$g(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Remark.

1° $$f'(z)=g(f(z)),\quad g:\text{一價} \tag{4}$$

ヲ満足スル函數ハ明カニ前節ニ考ヘラレタ性質ヲモツ。依ッテ (4) ノ solution ガ meromorphic デアレバ (3) ノ如キ形デナケレバナラナイ。(4) ヨリ

$$\int_0^z \frac{f'(z)}{g(f(z))}dz = Z$$

ヲ得ル。コレヨリ

$$\int_{f(0)}^{f(z)} \frac{dx}{g(x)} = Z$$

但シ積分ハ Z ガ $0\to C$ ナルトキ $f(z)$ ガウゴク道ニ沿フモノトスル。

$$\int_{f(0)}^{t} \frac{dx}{g(x)} = u(t) \tag{5}$$

トオケバ

$$f(z)=u^{-1}(z)$$

即チ積分 (5) ノ逆函數ガ meromorphic function デアレバ、ソレハ (3) ノ形トナル。

2° 次ニ

$$\left(f'(z)\right)^2=g(f(z)) \tag{6}$$

ヲ満足スル函數ヲ考ヘルト

$$\left(f'(\varphi(z))\right)^2=\left(f'(z)\right)^2$$

ヨリ $\varphi(z)=\pm z+\mathrm{const}$

ト云フ形トナル。コレヨリ $f(z)$ ハ periodic (simple 又ハ double) デ period ノ四辺形又ハ帯状形ノ中デ two-valent デアル。

$$\int_{z(0)}^{t} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = u_1(t)$$

ノ逆函數ガ meromorphic ナラバコノ class ニ屬スル。

2) 二ツノ全有限平面デ meromorphic ナ函數 $f(z)$, $g(z)$ ニ關スル automorphism ノ function group ガ一致スルタメニ必要ニシテ十分ナ條件ハ

$$g(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$$

トナルコトデアル。

證明. 十分ナコトハ明カダカラ必要性ヲ證明スル。

$$a = f(z), \qquad b = g(z)$$

トオケバ a ガ $f(z)$ ノ除外値デナケレバ

$$\left.\begin{array}{l} z_a = f_i^{-1}(a), \ f_i^{-1}(z) \text{ ハ } z = a \text{ デ regular 又ハ} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{algebraic} \end{array}\right\} \quad (7)$$

ナル $f(z)$ ノ逆函數ノ一ツノ branch ガアル。スルト

$$b = g(z_a)$$

ハ f^{-1} ノ branch f_i^{-1} ノ取リ方ニハ independent デアル。何トナレバ

$$f_j^{-1}(a) = \varphi_{ij}(f_i^{-1}(a))$$

ナル φ_{ij} が存在スルカラ

$$g(f_j^{-1}(a)) = g(\varphi_{ij}(f_i^{-1}(a)) = g(f_i^{-1}(a)) = b$$

トナル。ヨツテ $b = b(a)$ ハ a ノ一價函數デアル。トコロが (ワ) ヨリ $b(a)$ ハ各点デ regular 又ハ algebraic ナルコトがワカルカラ、結局 $b(a)$ ハ $f(z)$ ノ除外値ヲ除イタトコロデ定義サレ、ソコデ一價、正則デアル。同様ノコトが $a = a(b)$ ニツイテモ云ヘルカラ、コレハ一次函數デナケレバナラヌ。

Remark.

Nevanlinna, Cartan ハ meromorphic function ハ

$$E_z(f(z) = a) = E_a(f)$$

トオクトキ、$E_{a_i}(f)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ニヨツテ決定サレ

$$f(z) = a$$

ノ multiplicity ヲモ考ヘニ入レレバ $(a_1, a_2, a_3, a_4) = -1$ ナルトキヲ除ケバ四ツデ十分デアルコトヲ示シタ。

全ク同様ニ (multiplicity ヲ入レテ)

$$E_{a_i}(f) = E_{b_i}(g) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

ナラバ $(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq -1$

$$g=\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}$$

ナルコトが云ヘル。※

之レヲ用ヒルト 2) ノ定理ハ次ノ如クニモ証明サレル。

$$a=a_i\ (i=1,2,3,4),\quad (a_1,a_2,a_3,a_4)\neq -1$$

$$a_i \neq \text{exceptional pt. of } f.$$

ヲトレバソレニ對應シテ

$$b=b_i\ \ (i=1,2,3,4)$$

が定マル。シカモ $E_{a_i}(f)$, $E_{b_i}(g)$ ハ multiplicity ヲコメテ一致スル。

※ $a_4\to\infty$, $b_4\to\infty$ ナルヨウナ一次変換ヲ f, g ニホドコシテ考ヘレバ

$$\infty,\ a_1,\ a_2,\ a_3;\qquad \infty,\ b_1,\ b_2,\ b_3$$

ニツイテ定理ヲ証明スレバヨイ。コノタメニ、例ノ如ク

$$\frac{f-a_i}{g-b_i}=e^{\varphi_i},\quad i=1,2,3$$

トオケバ f, g ヲ消去スルコトニヨリ

$$\sum(a_2-a_3)e^{\varphi_1}+\sum(b_2-b_3)e^{\varphi_2+\varphi_3}=0$$

ヲ得ル。コレハ φ_1, φ_2, φ_3 ノウチ少クトモ一ツが const デナイト不能デアル。

3) 次ニ $f(z)$, $g(z)$ ノ group of functions of automorphism ヲ夫々 F. G. トスルトキ F ガ G ノ subgroup トナルトキヲ考ヘル。

即チ

$$f(\varphi(z)) = f(z)$$

ヲ満足スルスベテノ $\varphi(z)$ ニ對シテ

$$g(\varphi(z)) = g(z)$$

ガ成立スルトセヨ。コノ時ニモ前ト同様ニスレバ

$$b = b(a)$$

ハ a ノ一價函數デアル。シカシ b ハ a ノ一價函數トハ限ラナイ。依ッテ

i) $a = a(b)$ ガ finite-valued ノトキハ

$b = R(a)$ トナルカラ

$$g(z) = R(f(z)), \quad R \text{ハ rational } f.$$

ii) $a = a(b)$ ガ infinitely many valued ノトキハ

$$b = h(a)$$

但シ $h(a)$ ハ $f(z)$ ノ exceptional value (コレハ高々2ツシカナイ) 以外デハ meromorph ナ函數デアル。

依ッテ

$$g(z) = h(f(z))$$